Acta Universitatis Wratislaviensis No 2023
Logika 18 Wrocław 1998

JEAN-YVES BÉZIAU

RECHERCHES SUR LA LOGIQUE ABSTRAITE: LES LOGIQUES NORMALES

1. PRÉSENTATION

A[1] la fin des années cinquante N.C.A. da Costa a développé de nouveaux systèmes de logique ([1], [5] - [7]) que l'on classe aujourd'hui sous le nom de logique paraconsistante. Ces systèmes furent d'abord élaborés d'un point de vue syntaxique, ce n'est que plus tard qu'une sémantique fut créée ([8], [9], [19]). Les idées utilisées pour cette sémantique furent adaptées à d'autres logiques et en particulier à la logique intuitionniste positive ([16], [18]) et à différentes logiques modales [17], on fournissait ainsi une nouvelle alternative à la sémantique kripkéenne. L'étude systématique de ces méthodes aboutit finalement à ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de la valuation ([10] - [12], [14], [20]).

Un des théorèmes de base de la théorie de la valuation est que tout calcul logique possède une sémantique bivalente adéquate. Ce qui est remarquable dans ce résultat est que la nature des objets de ce calcul (appelés formules) n'intervient pas, ce qui lui donne un caractère extrêmement général.

Ce que l'on appelle *Logique Abstraite* est justement une approche de la logique qui consiste à faire abstraction de la nature des objets (formules).

Nous étudions ici une classe de logiques dites normales (notion plus générale que celle de calcul logique utilisée dans la théorie de la valuation). L'idée fondamentale est d'étudier des propriétés de la relation de déductibilité à partir de lois générales gouvernant cette relation (dans le cas des logiques normales: identité, monotonie, coupure) et de la structure des classes d'objets que nous appelons théories (on reprend et on développe le concept essentiel de théorie saturée utilisé dans la théorie de la valuation).

---

[1] Nous remercions D. Miller pour ses remarques sur ce travail et N.C.A. da Costa qui l'a inspiré.

Si cette approche n'est pas sans rappeler celle de l'école polonaise qui consiste à mettre en avant la notion de conséquence ([14], [22] - [24]) (en fait la classe des logiques normales peut être définie de façon équivalente à partir de propriétés de cet opérateur), elle en diffère cependant en se situant à un niveau plus général au sens où l'on n'impose *a priori* aucun axiome.

On donne ainsi une définition tout à fait universelle de la notion de sémantique, et on établit son rapport avec le concept de logique normale par la construction d'un modèle canonique. On voit que selon cette approche la validité d'un raisonnement ne dépend plus de conditions internes (comme la forme et la composition des formules) mais de conditions externes, à savoir la situation dans la structure. En ce sens la logique abstraite est un dépassement de la logique aristotélicienne.

On montre ensuite comment l'on peut réduire systématiquement le concept de sémantique à celui de sémantique bivalente, apportant ainsi un appui solide à la thèse de Frege. Le théorème que l'on prouve à cet effet s'avère avoir de multiples applications (cf. [2]).

Le résultat central de cet article, qui prouve la minimalité d'une certaine sémantique bivalente pour les logiques normales, renforce également le bien fondé de la théorie de la valuation et apporte une nouvelle lumière sur la signification et la preuve du théorème de complétude.

L'on distingue ainsi différentes formes, qui sont souvent confondues (à tort ou à raison), de ce que nous appelons la *loi de Lindenbaum*, on établit leurs liens réciproques ainsi que leurs connections avec les lois dites de compacité, connections qui constituent des généralisations du *lemme de Lindenbaum*.

2. CONCEPTS FONDAMENTAUX

Une *logique* $\mathfrak{L}$ est une paire $\langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ où

– $\mathfrak{F}$ est un ensemble, appelé *domaine* de la logique,

– $\vdash$ est une relation sur $\mathfrak{P}(\mathfrak{F}) X \mathfrak{F}$, dite *relation de déductibilité*.

On appelle *théorie* une partie T de $\mathfrak{F}$.

On écrira $T \vdash F$ pour signifier que $(T, F) \in \vdash$ et $T \nvdash F$ pour signifier le contraire. Par abus de notation on écrira $T \vdash T'$ pour signifier que pour tout $F \in T'$, $T \vdash F$.

La *clôture* d'une théorie T est définie de la façon suivante:

$$\mathrm{cl}\, T = \{F \in \mathfrak{F};\ T \vdash F\}.$$

Une théorie T est dite *F-limitée* ssi $T \nvdash F$, *limitée* ssi il existe F tel que T est F-limitée (*illimitée* dans le cas contraire).

Une théorie T est dite *close* ssi $T \vdash F \Rightarrow F \in T$.

Une théorie T est dite *F-saturée* ssi T est F-limitée et pour tout G tel que $G \notin T$, $T \cup \{G\} \vdash F$, *saturée* ssi il existe F tel que T est F-saturée.

Une théorie T est dite *maximale* ssi T est limitée et n'est contenue strictement dans aucune théorie limitée, *F-maximale* ssi T est maximale et F-limitée.

3. LOGIQUE NORMALE

Une logique est dite *normale* ssi sa relation de déductibilité vérifie les trois lois suivantes:

(i) loi d'identité (I): pour tout F, $\{F\} \vdash F$.

(ii) loi de monotonie infinie (M_∞): soient T, T', F tels que $T \vdash F$ et $T \subseteq T'$ alors $T' \vdash F$.

(iii) loi de coupure infinie (C_∞): si $T \vdash T'$ et si $T' \vdash F$ alors $T \vdash F$.

Si on considère la loi suivante:

loi d'identité infinie (I_∞): $F \in T \Rightarrow T \vdash F$,

on a une caractérisation plus simple de la classe des logiques normales.

PROPOSITION 1. *Une logique est normale ssi elle vérifie I_∞ et C_∞.*

On peut également caractériser la classe des logiques normales à l'aide de la seule loi suivante:

loi S: $T \vdash F$ ssi pour tout T' si $T' \vdash T$ alors $T' \vdash F$.

THÉORÈME 1. *Une logique est normale ssi elle vérifie la loi S.*

On dit qu'une logique est *polonaise* ssi elle vérifie les trois lois suivantes:

(1) $T \subset \mathrm{cl}\, T$,

(2) $T \subseteq T' \Rightarrow \mathrm{cl}\, T \subseteq \mathrm{cl}\, T'$,

(3) $\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\, T \subseteq \mathrm{cl}\, T$.

PROPOSITION 2. *Une logique est normale ssi elle est polonaise.*

Remarque. Il y a bien d'autres façons de définir la classe des logiques normales, notamment à partir de la notion de démonstration [10], [21].

4. SÉMANTIQUE

Une *sémantique* $\mathfrak{S}$ est un triplet $\langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{M}; \mathrm{mod} \rangle$ où

– $\mathfrak{F}$ est un ensemble, appelé *domaine* de la sémantique,

– $\boldsymbol{M}$ est un ensemble, appelé *univers* de la sémantique,

– mod est une application de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{P}(\boldsymbol{M})$:

$$\mathrm{mod}\colon \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{P}(\boldsymbol{M}),$$
$$F \longrightarrow \mathrm{mod}\, F;$$

on étend naturellement mod en une application **mod** (que pour des raisons de simplicité on notera ordinairement mod) de $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{P}(\boldsymbol{M})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{mod}\colon \mathfrak{P}(\mathfrak{F}) &\longrightarrow \mathfrak{P}(M),\\ T &\longrightarrow \mathbf{mod}\, T = \bigcap_{F \in T} \mathrm{mod}\, F. \end{aligned}$$

Etant donnée une sémantique $\mathfrak{S}$, on appelle *relation de déductibilité sémantique standard* de $\mathfrak{S}$, la relation définie sur $\mathfrak{P}(\mathfrak{F}) X \mathfrak{F}$ de la manière suivante: $T \models_{\mathfrak{S}} F$ ssi $\mathrm{mod}\, T \subseteq \mathrm{mod}\, F$.

PROPOSITION 3. *Soit $\mathfrak{S} = \langle \mathfrak{F}; M; \mathrm{mod} \rangle$ une sémantique et $\models_{\mathfrak{S}}$ la relation de déductibilité standard de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \models_{\mathfrak{S}} \rangle$ est une logique normale.*

Preuve. I et C_∞ sont valables de part, respectivement, la réfléxivité et la transitivité de la relation d'inclusion, M_∞ est valable de part le fait que si $T \subseteq T'$ alors $\mathrm{mod}\, T' \subseteq \mathrm{mod}\, T$ et de part la transitivité de la relation d'inclusion.

On peut se demander si ces trois lois suffisent à caractériser la notion de déductibilité sémantique standard; c'est ce que nous allons maintenant montrer en prouvant que pour toute logique normale $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ il existe une sémantique $\mathfrak{S}$ *déductivement équivalente* (ie telle que $\vdash = \models_{\mathfrak{S}}$).

5. SÉMANTIQUE CANONIQUE

Soit une logique normale $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ on définit $\mathfrak{C} = \langle \mathfrak{F}; C; \mathrm{cod} \rangle$ la *sémantique canonique* associée à $\mathfrak{L}$ de la manière suivante:

$$-C = \mathfrak{P}(\mathfrak{F}),$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{cod}\colon \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{F})),\\ F &\longrightarrow \mathrm{cod}\, F = \{T; T \vdash F\}; \end{aligned}$$

cod est donc définie ainsi:

$$\begin{aligned} -\mathbf{cod}\colon \mathfrak{P}(\mathfrak{F}) &\longrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{F})),\\ T &\longrightarrow \mathbf{cod}\, T = \{T'; T' \vdash T\}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. $T \vdash F \Leftrightarrow T \models_{\mathfrak{C}} F$.

Preuve. Elle est immédiate en utilisant le théorème 1.

COROLLAIRE. *Toute logique normale a une sémantique déductivement équivalente.*

6. SÉMANTIQUE BIVALENTE

Une *sémantique* $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{F}; B; \mathrm{bod} \rangle$ est dite *bivalente* ssi B est inclu dans l'ensemble des applications de $\mathfrak{F}$ dans $\{0, 1\}$ et $\mathrm{bod}\, F = \{b \in B; b(F) = 1\}$.

Nous allons montrer que le concept de sémantique peut, en un certain sens, se ramener wlog à celui de sémantique bivalente.

On dit qu'une sémantique $\mathfrak{S}' = \langle \mathfrak{F}'; \boldsymbol{M}'; \mathrm{mod}' \rangle$ est *épimorphe* à une sémantique $\mathfrak{S} = \langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{M}; \mathrm{mod} \rangle$ ssi elles ont même domaine (ie $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$) et il existe une surjection ϕ de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}'$ telle que $m \in \mathrm{mod}\, F$ ssi $\phi m \in \mathrm{mod}'\, F$ (donc $\phi\, \mathrm{mod}\, F = \mathrm{mod}'\, F$).

LEMME. $\phi\, \mathrm{mod}\, T = \mathrm{mod}'\, T$.

Preuve. $\phi\, \mathrm{mod}\, T = \phi \bigcap_{F \in T} \mathrm{mod}\, F = \bigcap_{F \in T} \phi\, \mathrm{mod}\, F = \bigcap_{F \in T} \mathrm{mod}'\, F = \mathrm{mod}'\, T.$

THÉORÈME 3. *Si $\mathfrak{S}'$ est épimorphe à $\mathfrak{S}$ alors $\mathfrak{S}'$ est déductivement équivalente à $\mathfrak{S}$.*

Preuve. $\mathrm{mod}\, T \subseteq \mathrm{mod}\, F$ ssi $\phi\, \mathrm{mod}\, T \subseteq \phi\, \mathrm{mod}\, F$ ssi $\mathrm{mod}'\, T \subseteq \mathrm{mod}'\, F$.

THÉORÈME 4. *Soit $\mathfrak{S} \langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{M}; \mathrm{mod} \rangle$ une sémantique, il existe une sémantique bivalente $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{B}; \mathrm{bod} \rangle$ épimorphe à $\mathfrak{S}$.*

Preuve. Soit $\Psi \colon \boldsymbol{M} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathfrak{F}}$,

$$m \longrightarrow \Psi m, \quad \Psi m F = 1 \text{ ssi } m \in \mathrm{mod}\, F,$$

on définit l'univers $\boldsymbol{B}$ comme étant $\Psi(\boldsymbol{M})$.

Soit alors $\Phi \colon \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{B}$,

$$m \longrightarrow \Phi m = \Psi m,$$

Φ est l'épimorphisme recherché ($m \in \mathrm{mod}\, F$ ssi $\Phi m F = 1$ ssi $\Phi m \in \mathrm{bod}\, F$).

COROLLAIRE. *Pour toute sémantique il existe une sémantique bivalente qui lui est déductivement équivalente.*

COROLLAIRE. *Toute logique normale a une sémantique bivalente déductivement équivalente.*

Soit $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ une logique normale, $\mathfrak{C} = \langle \mathfrak{F}; C; \mathrm{cod} \rangle$ sa sémantique canonique et Φ comme dans le théorème, on a: $\Phi T(F) = 1$ ssi $T \in \mathrm{cod}\, F$ ssi $T \vdash F$ ssi $F \in \mathrm{cl}\, T$; la sémantique bivalente canonique $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{F}; \Phi C; \mathrm{bod} \rangle$ déductivement équivalente à $\mathfrak{L}$ a donc pour univers l'ensemble des fonctions caractéristiques des clôtures des théories de $\mathfrak{L}$ qui correspond à l'ensemble des fonctions caractéristiques des théories closes de $\mathfrak{L}$.

On définit une relation d'ordre pour les sémantiques bivalentes de la façon suivante: $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{B}'$ ssi $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B}'$.

THÉORÈME 5. *La sémantique bivalente canonique d'une logique normale est l'élément maximum de la classe des sémantiques bivalentes déductivement équivalentes à cette logique.*

Preuve. On montre que si $T \vdash F \Rightarrow T \models_{\mathfrak{B}} F$ alors $\boldsymbol{B}$ est inclu dans l'ensemble des fonctions caractéristiques des théories closes de $\mathfrak{L}$. Soit $b \in \boldsymbol{B}$, on considère $Tb = \{G;\, b(G) = 1\}$. On voit que Tb est close: si $Tb \vdash F$ alors $Tb \models_{\mathfrak{B}} F$, comme $b(Tb) = 1$, $b(F) = 1$, donc $F \in Tb$.

Une question qui se pose est de savoir si l'on peut trouver une sémantique bivalente minimum ou, à défaut, minimale.

7. LINDENBAUM

Une logique est dite *logique normale de Lindenbaum* ssi elle vérifie la loi suivante:

LOI de Lindenbaum 2. *Toute théorie F-limitée est contenue dans une théorie F-saturée.*

Si on a une logique normale de Lindenbaum $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ on montre facilement que la sémantique ultracanonique $\mathfrak{U} = \langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{U}; \text{uod} \rangle$ où $\boldsymbol{U}$ est l'ensemble des théories saturées et où uod$F = \{T;\ T$ est saturée et $T \vdash F\}$ lui est déductivement équivalente. On voit que la sémantique bivalente ultracanonique associée à $\mathfrak{L}$ a pour univers l'ensemble des fonctions caractéristiques des théories saturées (dans une logique normale les théories saturées sont closes).

THÉORÈME 6. *La sémantique bivalente ultracanonique d'une logique normale est un élément minimale de la classe des sémantiques bivalentes déductivement équivalentes à cette logique.*

Preuve. On se convaincra facilement que pour qu'une sémantique $\mathfrak{B} = \langle \mathfrak{F}; \boldsymbol{B}; \text{bod} \rangle$ soit minimale pour une logique $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}; \vdash \rangle$ il faut et il suffit que pour tout élément b de $\boldsymbol{B}$ il existe T et F tels que b soit l'unique élément de $\boldsymbol{B}$ tel que $b(T) = 1$ et $b(F) = 0$. Soit b un élément de l'univers de la sémantique bivalente ultracanonique de $\mathfrak{L}$ et soit TF-saturée la théorie dont b est la fonction caractéristique (on a donc $b(T) = 1$ et $b(F) = 0$), supposons qu'il existe un autre élément b' de l'univers tel que $b'(T) = 1$, $b'(F) = 0$; si $b(G) = 1$ alors $G \in T$ et donc $b'(G) = 1$, par conséquent (puisque $b \neq b'$) il existe H tel que $b(H) = 0$ (ie $H \notin T$) et $b'(H) = 1$, mais alors $T \cup \{H\} \nvdash F$, ce qui contredit le fait que T soit F-saturée.

On considère à présent d'autres formes de la loi de Lindenbaum:

(L1) *Toute théorie limitée est contenue dans une théorie saturée.*
(L3) *Toute théorie limitée est contenue dans une théorie maximale.*
(L4) *Toute théorie F-limitée est contenue dans une théorie F-maximale.*

On appelle logique NL1 (NL2, NL3, NL4) une logique normale dans laquelle la loi L1 (L2, L3, L4) est valable. On continuera d'appeler simplement logique normale de Lindenbaum une logique NL2 lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Il résulte du théorème 6 le

COROLLAIRE. *Dans une logique* NL4 *l'ensemble des théories saturées coïncide avec celui des théories maximales.*

Il est clair que dans une logique normale on a les résultats suivants:

$$L4 \Rightarrow L3 \Rightarrow L1, \quad L4 \Rightarrow L2 \Rightarrow L1.$$

THÉORÈME 7. *Il existe des logiques normales qui ne sont pas* NL1.

Preuve. On considère une logique dont le domaine est infini et où la relation de déductibilité est définie de la façon suivante: $T \vdash F$ ssi $F \in T$ ou T est infinie (pour les détails voir [3]).

8. COMPACITÉ

Une logique normale est dite *déductivement compacte* (NDC) ssi elle vérifie la loi de compacité déductive:

si $T \vdash F$ alors il existe T_0 finie et inclue dans T telle que $T_0 \vdash F$.

THÉORÈME 8. *Toute logique normale déductivement compacte est une logique normale de Lindenbaum.*

Preuve. Soit T une théorie F-limitée on considère l'ensemble Λ des extensions F-limitées de T:

a) On va montrer que dans une logique normale cet ensemble à un élément maximal (au sens de la relation d'inclusion).

Il s'agit d'une application du lemme de Zorn: on montre que toute chaîne de cet ensemble est majorée. Soit C une chaîne de Λ on considère l'union U des éléments de C. Il est donc immédiat que si $T \in C$ alors $T \subseteq U$, reste à prouver que U est F-limitée. Supposons qu'elle ne le soit pas, alors $U \vdash F$. Comme la logique est déductivement compacte il existe donc $T_0 \subseteq U$, T_0 finie et $T_0 \vdash F$, mais il existe un élément de C qui contient T_0, par M_∞ cette théorie n'est pas F-limitée, ce qui est absurde.

b) Soit T un élément maximal de Λ, on montre à présent que T est F-saturée.

Soit $G \notin T$, supposons que $T \cup \{G\} \nvdash F$ alors $T \cup \{G\} \in \Lambda$ et contient strictement T, ce qui contredit la maximalité de T.

On montre à présent que ce théorème ne peut être renforcé et que sa réciproque est fausse.

THÉORÈME 9. *Il existe des logiques* NDC *qui ne sont pas* NL3.

Preuve. On considère une logique dont le domaine est $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels) et où la relation de déductibilité est définie de la façon suivante:

$$T \vdash n \quad \text{ssi il existe } m \in T,\ m \geqslant n.$$

Que cette logique soit NDC est évident, montrons qu'elle ne vérifie pas L3. On va montrer en fait que dans cette logique il n'y a pas de théorie maximale (comme il y a des théories limitées il sera alors facile de conclure).

Commençons par observer que dans cette logique une théorie est infinie ssi elle est illimitée. Si une théorie est infinie elle n'est donc pas maximale. Soit une théorie finie T, il existe n telle que $T \nvdash n$ et on a $T \cup \{n\} \nvdash n+1$. Si T est finie elle n'est donc pas maximale non plus.

Corollaire. *Il existe des logiques* NL2 *qui ne sont pas* NL3 (*et donc des logiques* NL1 *qui ne sont pas* NL3, NL2 *qui ne sont pas* NL4). *Il existe des logiques* NDC *qui ne sont pas* NL4.

Proposition 4. *Il existe des logiques* NL4 *qui ne sont pas* NDC.

Preuve. Cas de la logique du second ordre. Cette logique vérifie bien en effet L4: soit une théorie T F-limitée, T a donc un modèle m, considèrons $Th(m) = \{G; m \in \text{mod } G\}$, $Th(m)$ est F-maximale et contient T.

Corollaire. *Il existe des logiques* NL2 *qui ne sont pas* NDC (*ie la réciproque du théorème 8 est fausse*).

Une logique normale est dite *limitativement compacte* (NIC) ssi elle vérifie la loi de compacité limitative:

si T est illimitée, il existe T_0 finie et inclue dans T telle que T_0 soit illimitée.

On dira qu'une logique est normale *compacte* (NC) ssi elle est à la fois NIC et NDC.

Théorème 8b. *Toute logique* NIC *est une logique* NL3.

Preuve. Similaire à celle du théorème 8 (voir [3]).

Théorème 9b. *Il existe des logiques* NIC *qui ne sont pas* NL2.

Preuve. On considère une logique dont le domaine est $\boldsymbol{P}$ (l'ensemble des nombres premiers) et où la relation de déductibilité est définie de la façon suivante:

si $p = 1$, $T \vdash p$ ssi il existe $p' = T$, p' divise p,

si $p \neq 1$, $T \vdash p$ ssi il existe $p' \in T$, p' divise p ou T est infinie.

a) Cette logique est normale. Il est évident que I_∞ est valable. En ce qui concerne C_∞, supposons que $T \vdash T'$ et $T' \vdash p$. Si $p \in T'$ alors $T \vdash p$. Si $1 \in T'$, alors $T \vdash 1$ donc $1 \in T$ donc $T \vdash p$. Supposons enfin T' infinie, si $1 \in T$ ou T est infinie on a de suite $T \vdash p$, et le cas contraire est impossible.

b) Cette logique est limitativement compacte. En effet si T est illimitée $T \vdash 1$, donc $1 \in T$, comme il est facile de voir que $\{1\}$ est illimitée on peut conclure.

c) L2 n'est pas valide. On a $\varnothing \nvdash 13$. Montrons que si $T \nvdash 13$, T n'est pas 13-saturée. Si 13 n'est pas déductible de T, T est fini, $13 \notin T$ et $1 \notin T$. Soit p un nombre premier quelconque différent de 1 et de 13 et n'appartenant pas à T (en vertu d'un résultat célébre on peut toujours en trouver un), alors $T \cup \{p\}$ est finie et comme p ne divise ni 13 ni 1 on a $T \cup \{p\} \nvdash 13$.

Corollaire. *Il existe des logiques* NL3 *qui ne sont pas* NL2 (*et donc des logiques* NL1 *qui ne sont pas* NL2, NL3 *qui ne sont pas* NL4). *Il existe des logiques* NIC *qui ne sont pas* NL4.

Corollaire des théorèmes 9. *Il existe des logiques* NDC *qui ne sont pas compactes et des logiques* NIC *qui ne sont pas compactes.*

Proposition 4b. *Il existe des logiques* NL4 *qui ne sont pas* NIC.

Preuve. Même exemple que dans la preuve de la proposition 4.

COROLLAIRE. *La réciproque du théorème* 8b *est fausse.*

Remarque. Du fait du théorème 6, le théorème 8 apparaît plus fondamental que le théorème 8b (voir [11] pour des commentaires détaillés). Ces deux théorèmes sont des variantes du fameux théorème ou lemme de Lindenbaum. En fait l'on peut démontrer ces théorèmes pour les logiques simplement monotones (on portera attention à la preuve du théorème 8 pour s'en convaincre) et ils sont équivalents à l'axiome du choix (cf. [3] et [13]).

9. FINITUDE

Une *logique* est dite (normale) *finie* ssi (elle est normale et) son domaine est fini.

Il est immédiat que si une logique est finie alors elle est compacte.

THÉORÈME 10. *Il existe des logiques normales finies qui ne sont pas* NL4.

Preuve. On considère une logique dont le domaine est constitué de deux objets F et G et dont la relation de déductibilité est définie de la façon suivante:

$$T \vdash F \quad \text{ssi } T \neq \emptyset, \qquad T \vdash G \quad \text{ssi } G \in T.$$

On vérifie sans peine que $\mathfrak{L}$ est normale.

$\emptyset$ est F-limitée, $\{F\}$ et $\{F, G\}$ ne sont évidemment pas F-maximale, $\{G\}$ ne l'est pas puisque $\{G\} \vdash F$ et $\emptyset$ ne l'est pas non plus car $\emptyset \cup \{F\} \nvdash G$, donc $\emptyset$ n'est contenue dans aucune théorie F-maximale.

COROLLAIRE. *Il existe des logiques compactes qui ne sont pas* NL4.

10. PERSPECTIVES

Si l'étude des logiques normales reste encore à approfondir, il ne faut cependant pas perdre la perspective générale qui est la motivation essentielle de ce travail et nous considérons donc cette étude particulière plutôt comme une exemplification concrète des méthodes fournies par la logique abstraite.

On peut également à partir des mêmes concepts fondamentaux développer l'étude de logiques non-normales, par exemple l'étude des logiques ne vérifiant pas I_∞ (logiques non-identitaires ou non-réflexives [15]) ou ne vérifiant pas M_∞ (logiques non-monotones) ou encore ne vérifiant pas C_∞ (logiques non-coupables).

Mais ce qui nous intéresse avant tout est de rester au niveau le plus général et d'élaborer des concepts qui permettront sans doute d'éclaircir la nature de la logique tant d'un point de vue mathématique que philosophique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-Y. Béziau, *Nouveau regard et nouveaux résultats sur la logique paraconsistante C1*, Logique et Analyse 141-142 (1993), pp. 45-58.

[2] J.-Y. Béziau, *Logiques construites suivant les méthodes de da Costa (I)*, Logique et Analyse 131-132 (1990), pp. 259-272.

[3] J.-Y. Béziau, *More about the connection between the axiom of choice and Lindenbaum's extension*, à paraître.

[4] D. J. Brown et R. Suszko, *Abstract logics*, Dissertationes Mathematicae CII (1973).

[5] N. C. A. da Costa, *Sistemas Formais Inconsistentes*, Thèse, Universidade Federal do Paraná, 1963.

[6] N. C. A. da Costa, *Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants* Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences de Paris T257 (1963), pp. 3790-3793.

[7] N. C. A. da Costa, *On the theory of inconsistent formal systems* Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. XV, n° 4 (1974), pp. 497-510.

[8] N. C. A. da Costa et E. H. Alves, *Une sémantique pour le calcul C1*, Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences de Paris T238A (1976), pp. 729-731.

[9] N. C. A. da Costa et E. H. Alves, *A semantical analysis of the calculi Cn*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. XVIII, n° 4 (1977), pp. 621-630.

[10] N. C. A. da Costa et J.-Y. Béziau, *Théorie de la valuation*, Logique et Analyse 146 (1994), pp. 95-117.

[11] N. C. A. da Costa et J.-Y. Béziau, *La théorie de la valuation en question*, [in:] *Proceedings of the Ninth Latin American Symposium on Mathematical Logic*, M. Abad (ed.), Universidad del Sur, Baiha Blanca, 1994, pp. 95-104.

[12] N. C. A. da Costa et J. Kotas, *Some problems on logical matrices and valorizations*, [in:] *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et A. M. Sette (eds), Sociedade Brasileira de Logica (1980), pp. 131-146.

[13] W. Dzik, *The existence of Lindenbaum's extensions is equivalent to the axiom of choice*, Reports on Mathematical Logic 13 (1981), pp. 29-31.

[14] N. Grana, *Sulla teoria delle valutazioni di N. C. A. da Costa*, Liguori Editore, Napoli 1990, 75 pp.

[15] D. Krause et J.-Y. Béziau, *Relativizations of the principle of identity*, Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logics 5 (1997), pp. 327-338.

[16] A. Loparic, *Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels*, Comptes Rendus de l'Acadèmie des Sciences de Paris T284A (1977), pp. 835-838.

[17] A. Loparic, *The method of valuations in modal logic* à paraître dans *Mathematical logic. Proceedings of the First Brazilian Conference*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et R. Chuaqui (eds.), Marcel Dekker, New York and Basel, 1977, pp. 141-157.

[18] A. Loparic, *A semantical study of some propositional calculi*, The Journal of Non-Classical Logic, Vol. 3, n° 1, May 1986.

[19] A. Loparic et E. H. Alves, *The semantics of the systems Cn of da Costa* à paraître dans *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et A. M. Sette (eds), Sociedade Brasileira de Lògica (1980), pp. 161-172.

[20] A. Loparic et N. C. A. da Costa, *Paraconsistency, paracompleteness and valuations*, Logique et Analyse 106 (1984), pp. 119-131.

[21] S. J. Surma, *An alternative approach to metalogic*, à paraître.

[22] A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press, 1956 (en particulier chapitres 3 et 5).

[23] R. Wójcicki, *Lectures on Propositional Calculi*, Ossolineum 1984.

[24] R. Wójcicki, *Theory of Logical Calculi*, Kluwer 1988.

Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Département de Philosophie
Université de Paris 7 Jussieu
Département de Mathématiques

Uniwersytet Wrocławski
Katedra Logiki i Metodologii Nauk
Szewska 36, 50-139 Wrocław

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-Y. Béziau, *Nouveau regard et nouveaux résultats sur la logique paraconsistante C1*, Logique et Analyse 141 - 142 (1993), pp. 45 - 58.

[2] J.-Y. Béziau, *Logiques construites suivant les méthodes de da Costa (I)*, Logique et Analyse 131 - 132 (1990), pp. 259 - 272.

[3] J.-Y. Béziau, *More about the connection between the axiom of choice and Lindenbaum's extension*, à paraître.

[4] D. J. Brown et R. Suszko, *Abstract logics*, Dissertationes Mathematicae CII (1973).

[5] N. C. A. da Costa, *Sistemas Formais Inconsistentes*, Thèse, Universidade Federal do Paraná, 1963.

[6] N. C. A. da Costa, *Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris T257 (1963), pp. 3790 - 3793.

[7] N. C. A. da Costa, *On the theory of inconsistent formal systems* Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. XV, n° 4 (1974), pp. 497 - 510.

[8] N. C. A. da Costa et E. H. Alves, *Une sémantique pour le calcul C1*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris T238A (1976), pp. 729 - 731.

[9] N. C. A. da Costa et E. H. Alves, *A semantical analysis of the calculi Cn*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. XVIII, n° 4 (1977), pp. 621 - 630.

[10] N. C. A. da Costa et J.-Y. Béziau, *Théorie de la valuation*, Logique et Analyse 146 (1994), pp. 95 - 117.

[11] N. C. A. da Costa et J.-Y. Béziau, *La théorie de la valuation en question*, [in:] *Proceedings of the Ninth Latin American Symposium on Mathematical Logic*, M. Abad (ed.), Universidad del Sur, Baiha Blanca, 1994, pp. 95 - 104.

[12] N. C. A. da Costa et J. Kotas, *Some problems on logical matrices and valorizations*, [in:] *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et A. M. Sette (eds), Sociedade Brasileira de Logica (1980), pp. 131 - 146.

[13] W. Dzik, *The existence of Lindenbaum's extensions is equivalent to the axiom of choice*, Reports on Mathematical Logic 13 (1981), pp. 29 - 31.

[14] N. Grana, *Sulla teoria delle valutazioni di N. C. A. da Costa*, Liguori Editore, Napoli 1990, 75 pp.

[15] D. Krause et J.-Y. Béziau, *Relativizations of the principle of identity*, Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logics 5 (1997), pp. 327 - 338.

[16] A. Loparic, *Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris T284A (1977), pp. 835 - 838.

[17] A. Loparic, *The method of valuations in modal logic* à paraître dans *Mathematical logic. Proceedings of the First Brazilian Conference*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et R. Chuaqui (eds.), Marcel Dekker, New York and Basel, 1977, pp. 141 - 157.

[18] A. Loparic, *A semantical study of some propositional calculi*, The Journal of Non-Classical Logic, Vol. 3, n° 1, May 1986.

[19] A. Loparic et E. H. Alves, *The semantics of the systems Cn of da Costa* à paraître dans *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, A. I. Arruda, N. C. A. da Costa et A. M. Sette (eds), Sociedade Brasileira de Lògica (1980), pp. 161 - 172.

[20] A. Loparic et N. C. A. da Costa, *Paraconsistency, paracompleteness and valuations*, Logique et Analyse 106 (1984), pp. 119 - 131.

[21] S. J. Surma, *An alternative approach to metalogic*, à paraître.

[22] A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press, 1956 (en particulier chapitres 3 et 5).

[23] R. Wójcicki, *Lectures on Propositional Calculi*, Ossolineum 1984.

[24] R. Wójcicki, *Theory of Logical Calculi*, Kluwer 1988.