Logique & Analyse **141-142** (1993), 45-58

NOUVEAUX RESULTATS ET NOUVEAU REGARD SUR LA LOGIQUE PARACONSISTANTE *C*1

JeanYves BÉZIAU*

1. *Introduction.*

Une théorie est dite triviale si l'on peut en déduire n'importe quoi, inconsistante si l'on peut en déduire une contradiction, paraconsistante si elle est inconsistante et nontriviale. Une logique paraconsistante est une logique pouvant servir de base aux développements de théories paraconsistantes. Les systèmes C créés par N.C.A. da Costa à la fin des années cinquante furent le véritable point de départ de la logique paraconsistante (cf [5][7][8]).

Le but de cet article est de donner une présentation nouvelle de la logique propositionnelle paraconsistante *C*1 (aucune connaissance préalable de cette logique n'est présupposée) en la reconstruisant à partir d'un système paraconsistant plus faible *C*i. On prétend de cette manière mettre en évidence le fait que les idées fondamentales sousjacentes à cette logique ne se limitent pas à la notion de paraconsistance.

Ainsi les méthodes employées ici peuvent être utilisées de façon systèmatique pour construire une pléiade de logiques nonclassiques (cf [2]), la raison étant qu'elles sont une généralisation des méthodes classiques, aussi bien d'un point de vue algébrique, sémantique ou déductif (cf [6][9][11][12]).

La présentation du calcul des séquents pour *C*1 qui est donnée ici est nouvelle et inédite (de même que le théorème d'élimination des coupures qui l'accompagne), une tentative d'adaptation des méthodes de Gentzen à cette logique avait été faite en 1968 par feu A.R.Raggio (cf [13]). Cette présentation s'accompagne d'une nouvelle preuve de la décidabilité de *C*1, résultant de l'élimination des coupures, ainsi que de nouvelles versions de la sémantique de *C*1 et du théorème de complétude.

On comparera ces techniques à celle des arbres ou tableaux récemment appliquée à cette logique (cf [1][3][4]).

2. *Les systèmes Ci et C*1.

On considère l'algèbre propositionnelle absolument libre usuelle $<\mathbb{F}; \wedge, \vee, \to, \neg>$. On définit à partir de là deux fonctions par composition: $A^\circ = \neg(A \wedge \neg A)$ $\urcorner^* A = \neg A \wedge A^\circ$ (intuitivement $\vdash A^\circ$ signifie "A obéit au principe de contradiction"), et la fonction * par récurrence: $p^* = p$, $(AcB)^* = A^* cB^*$ pour $c \in \{\wedge, \vee, \to\}$, $(\neg A)^* = \urcorner^* A^*$. Si T est une théorie (i.e. un ensemble de formules) $T^* = \{A^*; A \in T\}$.
Soient les schémas:

$$
\begin{array}{ll}
T & A \vee \neg A \\
\varepsilon & (A \wedge \neg A) \to (\neg(A \wedge \neg A) \to B) \\
\alpha & B^\circ \to ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)) \\
\beta & (\urcorner^* A \to B) \to ((\urcorner^* A \to \urcorner^* B) \to A)
\end{array}
$$

on considère les systèmes obtenus en ajoutant à la logique absolue (au sens de Curry [10]) un ou plusieurs de ces schémas et plus particulièrement les systèmes LAT, LATε, LATα, LAß.

Théorème 1.

a) Les trois systèmes LATε, LATα, LAß sont équivalents.

◇ On appelle Ci *la logique déterminée par ces systèmes*

b) La loi de Peirce $((A \to B) \to A) \to A)$ est valable dans Ci.

c) La logique classique C est traductible dans Ci, au sens suivant: $T \vdash_c F$ ssi $T^* \vdash_{ci} F^*$.

Preuve. Ce théorème résulte directement des sept lemmes que voici (on utilise des déductions naturelles, seul est signalé l'emploi des règles décisives par le symbole $\lrcorner$):

1)

$$(A \wedge \neg A) \to (\neg(A \wedge \neg A) \to B) \vdash_{LAT} B^\circ \to ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A))$$

$$
\dfrac{\vdash A \vee \neg A \qquad A \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \vdash B \qquad \neg A \vdash \neg B}{\neg A \vdash B \wedge \neg B} \qquad \dfrac{\vdash \neg(B \wedge \neg B)}{\neg A \vdash \neg(B \wedge \neg B)}}{\neg A \vdash A}\,\lrcorner}{\vdash A}
$$

2)

$$B^{\circ}\to\big((\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\neg A)\big)\vdash_{LAT} A\to\big(\urcorner^{*}A\to B\big)$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A}{\neg B\vdash A}\qquad \dfrac{\dfrac{\vdash\urcorner^{*}A}{\vdash\neg A}}{\neg B\vdash\neg A}\qquad \dfrac{\vdash\urcorner^{*}A}{\vdash A^{\circ}}}{\vdash B}\,\lrcorner$$

3)

$$B^{\circ}\to\big((\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\neg A)\big)\vdash_{LAT}\big(\urcorner^{*}A\to A\big)\to A$$

$$\dfrac{\vdash(A\wedge\neg A)\vee\neg(A\wedge\neg A)\quad A\wedge\neg A\vdash A\wedge\neg A\qquad \dfrac{\neg A,\neg(A\wedge\neg A)\vdash A\quad \neg A,\neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg A\quad \neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)}{\neg A,\neg(A\wedge\neg A)\vdash A\wedge\neg A}\,\lrcorner}{}$$

$$\dfrac{\vdash\ A\wedge\neg A\qquad A\vdash A\qquad \dfrac{\neg A\vdash A\wedge\neg A}{\neg A\vdash A}}{\vdash A}$$

4)

$$B^{\circ}\to\big((\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\neg A)\big)\vdash_{LAT}((A\to B)\to A)\to A$$

Par 2) on a:

$$B^{\circ}\to\big((\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\neg A)\big)\vdash_{LAT}((A\to B)\to A)\to\big(\urcorner^{*}A\to A\big)$$

on conclut par 3).

5)

$$B^{\circ}\to\big((\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\neg A)\big)\vdash_{LAT}\big(\urcorner^{*}A\to B\big)\to\Big(\big(\urcorner^{*}A\to\urcorner^{*}B\big)\to A\Big)$$

$$\dfrac{\dfrac{\urcorner^{*}A\vdash B\qquad\qquad \urcorner^{*}A\vdash\urcorner^{*}B}{\urcorner^{*}A\vdash A}\,2)}{\vdash A}\,3)$$

6)

$$\left(\urcorner^* A \to B\right) \to \left(\left(\urcorner^* A \to \urcorner^* B\right) \to A\right) \vdash_{LA} (A \wedge \neg A) \to (\neg(A \wedge \neg A) \to B)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A \wedge \neg A}{\vdash A}}{\urcorner^* B \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A \wedge \neg A}{\vdash \neg A} \qquad \vdash \neg(A \wedge \neg A)}{\vdash \urcorner^* A}}{\urcorner^* B \vdash \urcorner^* A}}{\vdash B}\lrcorner$$

7)

$$\left(\urcorner^* A \to B\right) \to \left(\left(\urcorner^* A \to \urcorner^* B\right) \to A\right) \vdash_{LA} A \wedge \neg A$$

$$\dfrac{\urcorner^*(A \wedge \neg A) \vdash \urcorner^*(A \wedge \neg A) \qquad \dfrac{\dfrac{\urcorner^* A, \urcorner^*(A \wedge \neg A) \vdash \urcorner^*(A \wedge \neg A) \qquad \dfrac{\dfrac{\urcorner^* A \vdash \urcorner^* A}{\urcorner^* A \vdash \neg A}}{\urcorner^* A \vdash A \vee \neg A}}{\urcorner^*(A \wedge \neg A) \vdash A}\lrcorner}{\urcorner^*(A \wedge \neg A) \vdash A \vee \neg A}}{\vdash A \vee \neg A}\lrcorner$$

Théorème 2.

$\vdash_{CI} B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ (ce schéma sera noté ι)
$\vdash_{CI} (\neg A \to B) \to (A \vee B)$
$\vdash_{CI} (A \to B) \to (\neg A \vee B)$
$\vdash_{CI} \urcorner^{*} \neg A \to A$
$\not\vdash_{CI} \neg\neg A \to A$ $\qquad$ $\not\vdash_{CI} A \to \neg\neg A$
$\not\vdash_{CI} \neg\neg(A \wedge \neg A) \to (A \wedge \neg A)$ $\qquad$ $\vdash_{CI} (A \wedge \neg A) \to \neg\neg(A \wedge \neg A)$
$\vdash_{CI} (A \wedge \neg A)^\circ$ $\qquad$ $\not\vdash_{CI} (A^\circ)^\circ$

Preuve. Elle est laissée au lecteur.

Théorème 3.
Soient:
D $\neg\neg A \to A$
υ $A^\circ \to (\neg A)^\circ$
k $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
κ $(A^\circ \wedge B^\circ) \to (A \wedge B)^\circ$
d $\neg(A \vee B) \to ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B))$
δ $(A^\circ \wedge B^\circ) \to (A \vee B)^\circ$
p $\neg(A \to B) \to ((\neg A \vee \neg B)\wedge (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$
π $(A^\circ \wedge B^\circ) \to (A \to B)^\circ$

- dans Ci D est équivalant à υ, k à κ, d à δ, et p à π.

Preuve. Elle est laissée au lecteur.

◇ On appelle $C1$ la logique obtenue à partir de $C1$ en ajoutant D (ou δ) et k (ou κ) et d (ou δ) et p (ou π) comme schémas d'axiome.

Remarques sur la présentation de C1.
D'après les résultats précédents on voit qu'il y a de multiples présentations de $C1$, celle qui paraît la plus simple et la plus intuitive est LA$\beta\upsilon\kappa\delta\pi$.
La présentation originelle était cependant différente, c'était LATD$\iota\upsilon\kappa\delta\pi$, peu après on s'est aperçu que υ était déductible de LATDι, et comme D n'est pas équivalent à υ dans LATι on a pris pour $C1$, LATD$\iota\kappa\delta\pi$ on voit facilement d'après les théorèmes précédents que LATDι est équivalent à LA$\beta\upsilon$).

En fait D n'a pas la même signification dans Ci et LATι ; dans Ci le schéma D correspond exactement à υ, c'est à dire à la règle "le principe de contradiction est conservé par passage à la négation", de même que dans

Ci les autres schémas (κ, δ, π) exprimant la conservation du principe de contradiction par passage à la connection (conjonction, disjonction, implication) ont un équivalent (k,d,p) permettant une interprétation en termes d'opérations ensemblistes ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ étant interprétés respectivement comme l'intersection, l'union et l'inclusion usuelles et $\neg$ comme un opérateur sur les ensembles obéissant aux conditions imposées par ces schémas; on peut également leur donner une signification algébrique au sens de Curry [10], $\neg$ est alors un opéreur non monotone, au sens de Curry [10] p.41, dans les treillis, N.C.A da Costa a désigné ces algèbres du nom d'algèbres de Curry, en hommage à ce dernier, cf [6]).

On remarquera que dans Ci et LATι de $A \rightarrow \neg\neg A$ on déduit $(\neg A)^\circ \rightarrow A^\circ$, et que dans Ci ils sont équivalents et que par conséquent $A \rightarrow \neg\neg A$ acquiert une signification telle qu'il serait absurde de le prendre comme axiome. On voit par ailleurs que si l'on rajoute $(A \wedge B)^\circ \rightarrow (A^\circ \wedge B^\circ)$ à $C1$ on obtient un système équivalent à C.

3. *Calculs des séquents Si et S1.*

Si et S1 sont obtenus à partir du calcul des séquents positif classique SP par ajout des règles suivantes:

$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg d \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge \neg A, \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge \neg A) \vdash \Delta}\,\neg g$	Si
$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A, \Delta \qquad \Gamma_1, A, \neg A \vdash \Delta_1}{\Gamma, \Gamma_1, \neg\neg A \vdash \Delta, \Delta_1}\,\neg\neg g$ $\dfrac{\Gamma \vdash AcB, \Delta \qquad \Gamma_1, A, \neg A \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2, B, \neg B \vdash \Delta_2}{\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \neg(AcB) \vdash \Delta, \Delta_1, \Delta_2}\,\neg Cg \qquad c \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$	S1

Remarques.8

L'axiome ne peut pas àtre "atomisé", c'est-à-dire que si l'on remplace (dans Si ou $S1$) le schéma A $\vdash$ A (valable pour toute formule A) par le schéma $p \vdash$

Architecture de $C1$

LAT

LA

$T \quad A \vee \neg A$

LAT$_\iota$

LA

$T \quad A \vee \neg A$

$\iota \quad B^\circ \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\big)\big)$

C$_\omega$

LA

$T \quad A \vee \neg A$

$D \quad \neg\neg A \rightarrow A$

$C1$

LA

$b \quad (\urcorner^* \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \big((\urcorner^* \mathrm{A} \rightarrow \urcorner^* \mathrm{B}) \rightarrow A\big)$

LATDι

LA

$T \quad A \vee \neg A$

$D \quad \neg\neg A \rightarrow A$

$\iota \quad B^\circ \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\big)\big)$

$C1$

LA

$b \quad (\urcorner^* \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow \big((\urcorner^* \mathrm{A} \rightarrow \urcorner^* \mathrm{B}) \rightarrow A\big)$

$\upsilon \quad A^\circ \rightarrow (\neg A)^\circ$

$\kappa\delta\pi \quad (A^\circ \wedge B^\circ) \rightarrow (AcB)^\circ$

$c \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

L $\longrightarrow$ L'
signifie que L
est strictemant
plus faible que L'

p (valable pour toute variable propositionnelle p) on obtient des systèmes strictement plus faibles.

Dans SP$\neg d$ est équivalente à $$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \urcorner^{*} A, \Delta}\, \urcorner^{*}_{d}$$

et $\neg g$ à $$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \urcorner^{*} A, \Delta}\, \urcorner^{*}_{g}.$$

Dans SP + $\neg$d $\neg\neg$g est équivalente à $$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\, {}_{\neg\neg g},$$

Les règles $\neg\neg g$et $\neg Cd$ peuvent être uniformisées en utilisant l'abréviation $k[A_1, ..., A_p]$ où, soit $k = \neg$ et $p = 1$ soit $k = \wedge$ ou $k = \vee$ou $k = \rightarrow$ et $p = 2$. On a ainsi l'écriture unique:

$$\frac{\Gamma \vdash k[A_1, ..., A_p], \Delta \quad \Gamma_1, A_1, \neg A_1 \vdash \Delta_1 \quad ... \quad \Gamma_p, A_p, \neg A_p \vdash \Delta_p}{\Gamma, \Gamma_1, ..., \Gamma_p, \neg k[A, ..., A] \vdash \Delta, \Delta_1, ..., \Delta_p}\, {}_{\neg kg}$$

Exemples de démonstrations.

Dans Si:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A}\,{}_{\neg d} \qquad B \vdash B}{\neg A \rightarrow B \vdash A, B}\,{}_{\neg g}}{\neg A \rightarrow B \vdash A \vee B}\,{}_{\vee d}}{\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)}\,{}_{\rightarrow d}$$

Dans SP + ${}_{\neg Vg}$:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\,{\scriptstyle \neg d}}{\vdash A \vee B, \neg A}\,{\scriptstyle ad+\vee d}
\qquad
\dfrac{\neg A \vdash \neg A}{A, \neg A \vdash \neg A}\,{\scriptstyle ag}
\qquad
\dfrac{B \vdash B}{B, \neg B \vdash B}\,{\scriptstyle ag}
}{
\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A, B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \vee B}\,{\scriptstyle \vee d}}{\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee B)}\,{\scriptstyle \rightarrow d}
}\,{\scriptstyle \neg \vee d}
$$

Théorème 4. $T \vdash_{Ci} F$ ssi $T \vdash_{Si} F$ $\quad T \vdash_{Ci} F$ ssi $T \vdash_{Si} F$
Preuve. Elle est sans histoire, pour la première preuve on prend *Ci* comme étant *LATε* et pour la seconde *C*1 comme étant *LATευκδπ*.

Elimination des coupures et corollaires.
Il est clair que *Si* admet l'élimination des coupures, a la propriété de la sousformule, est décidable (donc également *Ci*).

En ce qui concerne *S*1, la règle ¬kg sort de l'ordinaire, il suffit d'un peu d'attention pour voir que tout se passe bien.

Théorème 5. *S*1 admet l'élimination des coupures.

Preuve.
a) On peut faire baisser le degré de la formule de coupure dans le cas où cette formule est de type $\neg k\left[A_1, \ldots, A_p\right]$ (notée *K*):

$$
\dfrac{
\dfrac{\Gamma, K \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg K, \Delta}\,{\scriptstyle \neg d}
\qquad
\dfrac{\Gamma' \vdash K, \Delta' \quad \Gamma_1, A_1, \neg A_1 \vdash \Delta_1 \;\ldots\; \Gamma_p, A_p, \neg A_p \vdash \Delta_p}{\Gamma', \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \neg K \vdash \Delta', \Delta_1, \ldots, \Delta_p}\,{\scriptstyle \neg kg}
}{\Gamma, \Gamma', \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \vdash \Delta, \Delta', \Delta_1, \ldots, \Delta_p}\,{\scriptstyle c}
$$

donne

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash K, \Delta \qquad \Gamma', K \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,{\scriptstyle c}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p, \vdash \Delta, \Delta', \Delta_1, \ldots, \Delta_p}\,{\scriptstyle ad+ag}
$$

b) On peut faire baisser le rang de la coupure dans le cas où la dernière règle employée est $\neg kg$:

$$\dfrac{\Gamma \vdash C, \Delta \qquad \dfrac{\Gamma', C \vdash K, \Delta' \quad \Gamma_1, A_1, \neg A_1, C \vdash \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_p, A_p, \neg A_p \vdash \Delta_p}{\Gamma', \Gamma_1, \dots, \Gamma_p, C, \neg K \vdash \Delta', \Delta_1, \dots, \Delta_p}\,\neg kg}{\Gamma, \Gamma', \Gamma_1, \dots, \Gamma_p, \neg K \vdash \Delta, \Delta', \Delta_1, \dots, \Delta_p}\,c$$

donne

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash C, \Delta \quad \Gamma', C \vdash K, \Delta'}{\Gamma, T' \vdash K, \Delta, \Delta'}\,c \qquad \dfrac{\Gamma, \vdash C, \Delta \quad \Gamma_1, A_1, \neg A_1, C \vdash \Delta_1}{\Gamma, \Gamma_1, A_1, \neg A_1 \vdash \Delta, \Delta_1}\,c \quad \dots \quad \Gamma_p, A_p, \neg A_p \vdash \Delta_p}{\Gamma, \Gamma', \Gamma_1, \dots, \Gamma_p, \neg K \vdash \Delta, \Delta', \Delta_1, \dots, \Delta_p}\,\neg kg$$

NB: il s'agit d'un exemple, l'apparition de C dans la partie droite étant variable.

Corollaire. Décidabilité de $S1$ (et donc de $C1$).

Ce corollaire repose sur le fait que les formules apparaissant dans une démonstration sans coupure de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $S1$ sont, soit des sous-formules de Γ et Δ, soit des négations de sous-formules propres de Γ et Δ. Soit une formule F, un tel ensemble de formules sera appelé sphère de F.

4. *Sémantiques pour* C*i et* C1.

On appelle *valuation bivalente positive classique* 1(vbpc) une application v de $\mathbb{F}$ dans $\{0,1\}$ vérifiant les conditions usuelles pour $\wedge, \vee, \rightarrow$, par ex. $v(A \rightarrow B) = 1$ ssi $v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$

Théorème 6. Soient:

a1) si $v(\urcorner^* A) = 0$ alors $v(\mathrm{A}) = 1$

a2) si $v(A) = 0$ alors $v(\neg \mathrm{A}) = 1$

b1) si $v(A) = 1$ alors $v(\urcorner^* \mathrm{A}) = 0$

b2) si $v(A) = 1$ et $v(\neg \mathrm{A}) = 1$ alors $v(\mathrm{A}^\circ) = 0$

il est équivalent pour une vbpc de vérifier a1 ou a2, b1 ou b2.

Preuve. Elle est laissée au lecteur.

On appelle *Ci-valuation* une vbpc qui vérifie a1 1(ou a2) et b1 (ou b2). On définit usuellement $\vdash_{vi}$.

Théorème 7.
Il est équivalent pour une *C*i-valuation de vérifier l'une des deux conditions suivantes:

d1) si $v(A_i{}^\circ)=1$ pour tout i alors $v(k[A_1, \ldots, A_p]^\circ)=1$ $\qquad 1 \leq i \leq p$

d2) si $v(k[A_1, \ldots, A_p])=1$ et $v(A_i) \neq v(\neg A_i)$ alors $v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])=0$

Preuve. Soit v une *C*i-valuation vérifiant d1), supposons qu'elle vérifie l'antécédent de d2) et non son conséquent, comme $v(A_i) \neq v(\neg A_i)$ on a $v(A_i \wedge \neg A_i)=0$ donc $v(\neg(A_i \wedge \neg A_i))=1$, par d1) il vient $v(k[A_1, \ldots, A_p]^\circ)$ $=1$ comme par ailleurs on a $v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])=1$ il s'ensuit que $v(\urcorner^* k[A_1, \ldots, A_p])=1$ d' où $v(k[A_1, \ldots, A_p])=0$, ce qui est absurde. Soit maintenant v une Ci-valuation vérifiant d2), l'antécedent de d1) et non son conséquent, alors comme $v(A_i{}^\circ)=1$ on a $v(A_i) \neq v(\neg A_i)$, et comme $v(k[A_1, \ldots, A_p]^\circ)=0$ on a $v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])=1$ et $v(k[A_1, \ldots, A_p])=1$, on peut alors appliquer d2) et on a $v(\neg k[A_1, \ldots, A_p])=0$, ce qui est absurde.

On appelle *C*1-valuation, une *C*i-valuation qui obéit à l'une de ces conditions (et on définit $\vdash_{vi}$).

5. *Complétude.*

Théorème 8.
$T \vdash_{ci} F$ ssi $T \vdash_{vi} F$ est équivalent à
T a un modèle ssi T est non-triviale.

Preuve. Ce théorème est valable pour toute logique dans laquelle une négation classique est définissable.

Corollaire. Même résultat pour *C*1.
La santé (soundness) est facilement prouvée:
Si $T \vdash_{ci} F$ alors $T \vdash_{vi} F$ Si $T \vdash_{ci} F$ alors $T \vdash_{vi} F$

Théorème 9. (complétude de *C*i)
Si T est non-triviale alors T a un modèle.

Preuve. La question peut-être formulée ainsi: “Soit u l'application d'une théorie T non-triviale dans $\{0,1\}$ telle que $u(F) = 1$ pour toute formule F de T, cette application est-elle la restriction d'une Ci-valuation?”, la réponse positive est donnée par les arguments suivants.

Si T est non-triviale alors elle peut-être étendue en une théorie T non-triviale et $\urcorner^*$-complète (ie telle que $T' \vdash F$ ou $T' \vdash \urcorner^* F$ pour toute F) par la méthode habituelle. Soit v l'application de $\mathbb{F}$ 1dans $\{0,1\}$ induite par T (ie telle que $v(F)$ = ssi $T' \vdash F$, comme T' est $\urcorner^*$-consistante (non-triviale) on a: si $T' \vdash F$ alors $T' \vdash\!/\!- \urcorner^* F$, donc si $v(F) = 1$ alors $v(\urcorner^* F) = 0$, et comme T est $\urcorner^*$-complète on a: si $T' \vdash\!/\!- \urcorner^* F$ alors $T' \vdash F$, donc si $v(\urcorner^* F) = 0$ alors $v(F) = 1$. Ainsi v obéit aux conditions a1 1et b1 1du théorème 6 et comme il est facile de voir que v est une vbpc on en conclut que v est une Ci-valuation. Finalement on voit que la restriction de v à T est l'application u telle que $u(F) = 1$ pour toute F de T.

Corollaire. Complétude de $C1$.

6. *Tables de vérité pour Ci et C1.*

La méthode des tables de vérités.

Soit une formule F, on construit de la façon suivante sa table de vérité:
- on inscrit sur la première ligne toutes les formules de la sphère de F par ordre croissant de complexité,
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de variables propositionnelles de F, on remplit les n premières colonnes classiquement
- supposons maintenant la table construite pour les $n + m$ $(m \in \mathbb{N})$premières colonnes, la colonne suivante est établie ainsi:
  - si la formule à la cime n'est pas une négation on procède classiquement
  - sinon cette formule est de la forme $\neg G$
    - on prolonge les lignes existantes classiquement
    - parmi les lignes où est inscrit 1 sur la colonne ayant G à sa cime, on recopie les lignes suivantes en notant 1à la colonne ayant $\neg G$ à sa cime:
      - si $G = p$, il s'agit de toutes ces lignes
      - si $G = K[A_1, \ldots, A_p]$ et G n'est pas de la forme $D \wedge \neg D$

        → pour Ci: il s'agit de toutes ces lignes

        → pour $C1$: seulement des lignes où la valeur est la même sur la colonne dont la cime est a_i et sur la colonne dont la cime est $\neg a_i$ pour un i

Théorème 10. (adéquation de la méthode)
Soit une table de vérité pour une formule F:
• chacune des applications définie par une ligne de la table de vérité peut s'étendre en une application de $\mathbb{F}$ dans $\{0, 1\}$ qui est une valuation,
• pour toute valuation, sa restriction à la sphère de F coïncide avec une des applications définie par une ligne de la table.

Preuve. Elle est laissée au lecteur.

Corollaire. Décidabilité sémantique de Ci et $C1$.

Un exemple de table(s) de vérité.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$	
0	0	1	1	0	1	1	1	C
0	1	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	1	1	1	
1	1	0	1	1	0	1	1	C1
1	1	1	0	1	0	1	1	
1	1	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	1	
1	1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	1	0	0	Ci

* L'auteur tient à remercier E.H.Alves, D.Andler, W.A. Carnielli, N.C.A. da Costa, I.L.D'Ottaviano, A.Loparic, ainsi qu'un rapporteur anonyme ayant fait d'utiles suggestions.
Ce travail a pu être achevé alors que l'auteur séjournait à l'Université de São Paulo grâce à une bourse Lavoisier.

Universités de Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) et Paris 7 (Denis Diderot)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Béziau, J.-Y., *La logique propositionnelle paraconsistante C1 de N.C.A da Costa*, Université Denis Diderot (Paris 7), 1990.

[2] Béziau, J.-Y., "Logiques construites suivant les méthodes de da Costa I", *Logique et Analyse, n° 131-132* (1990), pp.259-272.

[3] Buchsbaum, A. et T.Pequeno, "A reasoning method for a paraconsistent logic", à paraître dans *Studia Logica*.

[4] Carnielli, W.A. *Reasoning about inconsistent knowledge*, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, 1990.

[5] da Costa, N.C.A. "Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants" *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 257* (1963), pp. 3790-3793.

[6] da Costa, N.C.A., *Algebra de Curry*, Université de São Paulo, 1967.

[7] da Costa, N.C.A. "On the theory of inconsistent formal systems" *Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol XV, n 4* (1974), pp.497-510.

[8] da Costa, N.C.A. et E.H.Alves, "A semantical analysis of the calculi Cn", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol XVIII, 20, n 4 (1977), pp. 621-63O.

[9] da Costa, N.C.A. et J.-Y.Béziau, *Théorie de la valuation*, à paraître.

[10] Curry, H.B. *Leçons de logique algébrique*, Gauthiers-Villars, Paris/ E.Nauwelaerts, Louvain, 1952.

[11] Grana, N., *Sulla teoria delle valutazioni di N.C.A. da Costa*, Liguori, Naples 1990.

[12] Loparic, A. et N.C.A. da Costa, "Paraconsistency, paracompleteness and valuations" *Logique et Analyse*, n 106 (1984), pp.119-131.

[13] Raggio, A.R. "Propositional sequence-calculi for inconsistent systems", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol IX, n° 4 (1968), pp.359-366.